

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

_____ В. М. Левчук

«_____» _____ 20__ г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

БЕСКОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ 2-РАНГА 1 С КОНЕЧНЫМИ И СОВЕРШЕННЫМИ ИНВОЛЮЦИЯМИ

Направление 01.04.01 Математика

Магистерская программа 01.04.01.02 Алгебра, логика и дискретная
математика

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор

_____ / А. И. Созутов

Выпускник

_____ / Б. Е. Дураков

Красноярск 2019

АННОТАЦИЯ

Группа G называется *группой 2-ранга 1*, если она содержит *инволюцию*, т. е. элемент порядка 2, и не содержит четверных подгрупп Клейна — элементарных абелевых подгрупп порядка 4 [5].

Цель работы — рассмотреть строение бесконечных групп 2-ранга 1 с конечными и совершенными инволюциями при некоторых дополнительных ограничениях на рассматриваемые группы, в том числе условиях конечности. Получить частичные решения вопросов 4.75 и 15.54 из Коуровской тетради [30] при дополнительных условиях.

Инволюция i группы G называется *конечной*, если для каждого элемента g из G подгруппа $\langle i, i^g \rangle$ конечна [15], и *совершенной*, если любые две неперестановочные инволюции из i^G сопряжены при помощи инволюции из этого же класса [16].

В §2 магистерской диссертации вопрос 4.75 [30] решается положительно в классе бинарно конечных и сопряжённо бинарно конечных групп. Доказано, что если группа G — контрпример к вопросу 15.54 [30], то она изоморфна фактор-группе свободного произведения двух циклических групп порядков 2 и $n > 2$, где n — число из спектра группы, выяснены некоторые её свойства.

В §3 доказаны следующие две основные теоремы, опубликованные в [17].

Теорема 1. *Группа G с обособленной, не максимальной в G 2-подгруппой T и конечной инволюцией i локально конечна и является группой Фробениуса с абелевым ядром $[i, G]$ и локально циклическим или (обобщённо) кватернионным дополнением T .*

Теорема 2. *Пусть 2-подгруппа T в группе G обособлена, $T < B < G$, и в T есть инволюция i , совершенная в B и G . Тогда G — группа Фробениуса с 2-полным абелевым ядром $[i, G]$ и локально циклическим или (обобщённо) кватернионным дополнением T .*

Ключевые слова: бесконечная группа, локально конечная группа, 2-ранг 1, конечная инволюция, совершенная инволюция, сильно вложенная подгруппа, группа Фробениуса.

ANNOTATION

The group G is a *group of 2-rank 1*, if it contains an *involution*, i.e. an element of order 2, and doesn't contain Klein four-subgroups, i.e. elementary abelian subgroups of order 4 [5].

The aim of the thesis is to consider the structure of infinite groups of 2-rank 1 with finite and perfect involutions with some additional restrictions on considering groups, including finiteness conditions. Also the aim is to obtain partial solutions of Questions 4.75 and 15.54 from Kourovka notebook [30] with some additional conditions.

The involution i of group G is *finite* if the subgroup $\langle i, i^g \rangle$ is finite for every element g from G [15], and is *perfect*, if every two non-commuting involutions from i^G are conjugated with involution from this conjugacy class [16].

It is proven in §2 of the master thesis that the Question 4.75 [30] has positive answer in classes of binary finite and conjugate binary finite groups. It is proven that the counterexample group G to the Question 15.54 [30] is isomorphic to a factor-group of the free product of two cyclic groups of order 2 and $n > 2$, where n is a number from the spectrum of G . Some properties of the group G are found.

These two main theorems are proven in §3 of the master thesis. They are published in [31].

Theorem 1. *A group G with an isolated 2-subgroup T nonmaximal in G and a finite involution i is a locally finite Frobenius group with Abelian kernel $[i, G]$ and locally cyclic or a (generalized) quaternion complement T .*

Theorem 2. *Let a 2-subgroup T in a group G be isolated, let $T < B < G$, and let T have an involution i perfect in B and G . Then G is a Frobenius group with 2-complete Abelian kernel $[i, G]$ and locally cyclic or (generalized) quaternion complement T .*

Key words: infinite group, locally finite group, 2-rank 1, finite involution, perfect involution, strongly embedded subgroup, Frobenius group.

СОДЕРЖАНИЕ

Содержание	2
Введение	3
1 Необходимые определения и используемые результаты	4
2 Некоторые результаты о периодических группах 2-ранга 1 с дополнительными условиями конечности	10
3 О группах с обособленной 2-подгруппой	18
3.1 Доказательство теоремы 3.1	18
3.2 Доказательство теоремы 3.2	21
Заключение	23
Список использованных источников	25

[изъято 22 страницы]

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Беляев В. В. Группы с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. — 1987. — Т. 26, № 5. — С. 531—535.
2. Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М. Конечные расщепляемые группы. — М. : Наука, 1968.
3. Бусаркин В. М., Старостин А. И. О расщепляемых локально конечных группах // Матем. сб. — 1963. — Т. 62(104), № 3. — С. 275—294.
4. Винберг Э. Б. Курс алгебры. — М. : Факториал Пресс, 2001.
5. Горенштейн Д. Конечные простые группы. — М. : Мир, 1985. — С. 352.
6. Горчаков Ю. М. О бесконечных группах Фробениуса // Алгебра и логика. — 1965. — Т. 4, № 1. — С. 15—29.
7. Дураков Б. Е. О некоторых группах 2-ранга 1 // Материалы международной конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения». — Казань, 24–28 июня 2019 г.
8. Дураков Б. Е. О некоторых группах 2-ранга 1 // Доклады Междунар. школы-конф. «Algorithmic problems in group theory and related areas». — Новосибирск, 23 июля–4 августа 2018 г.
9. Измайлов А. Н., Шунков В. П. Два признака непростоты группы с бесконечно изолированной подгруппой // Алгебра и логика. — 1982. — Т. 21, № 6. — С. 647—669.
10. Курош А. Г. Теория групп. — М. : Наука, 1967. — С. 648.
11. Мазуров В. Д. О бесконечных группах с абелевыми централизаторами инволюций // Алгебра и логика. — 2000. — Т. 39, № 1. — С. 74—86.
12. Мазуров В. Д. О точно дважды транзитивных группах // Вопросы алгебры и логики, Труды Инст. матем. СО РАН. — 1996. — Т. 30. — С. 114—118.
13. Попов А. М., Созутов А. И., Шунков В. П. Группы с системами фробениусовых подгрупп. — Красноярск : ИПЦ КГТУ, 2004. — С. 211.

14. Созутов А. И. О группах с квазициклическим централизатором конечной инволюции // Сибирский математический журнал. — Новосибирск, 2016. — Т. 57, № 5. — С. 1127—1130.
15. Созутов А. И. О некоторых бесконечных группах с сильно вложенной подгруппой // Алгебра и логика. — 2000. — Т. 39, № 5. — С. 602—617.
16. Созутов А. И. О парах Фробениуса с совершенной инволюцией // Алгебра и логика. — 2005. — Т. 44, № 6. — С. 751—762.
17. Созутов А. И., Дураков Б. Е. О группах с обособленной 2-подгруппой // Мат. заметки. — 2019. — Т. 105, № 3. — С. 428—432.
18. Созутов А. И., Дураков Е. Б. О двух вопросах из Коуровской тетради // Алгебра и логика. — 2013. — Т. 52, № 5. — С. 632—637.
19. Созутов А. И., Дураков Е. Б. О точно дважды транзитивных группах с обобщённо конечными элементами // Сиб. матем. журн. — 2017. — Т. 58, № 5. — С. 1144—1149.
20. Созутов А. И., Дураков Е. Б., Дураков Б. Е. О группах 2-ранга 1 // Сборник тезисов междунар. конф. «Мальцевские чтения – 2017». — Новосибирск, 20–24 ноября 2017 г.
21. Созутов А. И., Сучков Н. М., Сучкова Н. Г. Бесконечные группы с инволюциями. — Красноярск : Сиб. федер. ун-т, 2011. — С. 149.
22. Созутов А. И., Шунков В. П. Об одном обобщении теоремы Фробениуса на бесконечные группы // Матем. сб. — 1976. — Т. 100, № 4. — С. 495—506.
23. Сучков Н. М. О периодических группах с абелевыми централизаторами инволюций // Мат. сб. — 2002. — Т. 139, № 2. — С. 153—160.
24. Холл М. Теория групп. — М. : ИИЛ, 1962. — С. 468.
25. Шунков В. П. О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. — 1972. — Т. 11, № 4. — С. 470—494.
26. Amberg B., Sysak Y. P. On products of Groups with abelian subgroups of small index // Journal of Group Theory. — 2017. — Mar. — Vol. 20.


27. Bender H. Endliche zweifach transitive Permutationsgruppen, deren Involutionen keine Fixpunkte haben // Mathematische Zeitschrift. — 1968. — Juni. — Jg. 104.
28. Brauer R., Suzuki M. On finite groups of even order whose 2-Sylow group is a quaternion group. Vol. 45. — USA : Proc. Natl. Acad. Sci., 1959. — P. 1757–1759.
29. Ito N. Über das Produkt von zwei abelschen Gruppen. // Mathematische Zeitschrift. — 1955. — Jg. 62. — S. 400–401.
30. Khukhro E. I., Mazurov V. D. Unsolved Problems in Group Theory. The Kourovka Notebook // ArXiv e-prints. — 2018. — June.
31. Sozutov A. I., Durakov B. E. On Groups with an Isolated 2-Subgroup // Mathematical Notes. — 2019. — Vol. 105, no. 3. — P. 425–428.

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой


 В. М. Левчук
«18» июня 2019 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ
БЕСКОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ 2-РАНГА 1 С КОНЕЧНЫМИ И
СОВЕРШЕННЫМИ ИНВОЛЮЦИЯМИ


Направление 01.04.01 Математика

Магистерская программа 01.04.01.02 Алгебра, логика и дискретная
математика

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор

 /А. И. Созутов
18.06.2019

Выпускник

 /Б. Е. Дураков
18.06.2019

Красноярск 2019